

На правах рукописи

МИРОНОВ Денис Алексеевич

**МЕТОДЫ ГАЛЕРКИНА И КОЛЛОКАЦИИ
ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБЪЕМНОГО СИНГУЛЯРНОГО
ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ НА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ТЕЛАХ**

01.01.07 – вычислительная математика

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

КАЗАНЬ 2010

Работа выполнена на кафедре математики и суперкомпьютерного моделирования ГОУ ВПО «Пензенский государственный университет».

Научный руководитель — доктор физико-математических наук,
профессор **Смирнов Юрий Геннадьевич.**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор **Самохин
Александр Борисович;**
доктор физико-математических наук,
профессор **Плещинский
Николай Борисович.**

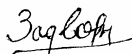
Ведущая организация: Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

Защита диссертации состоится 16 декабря 2010 г., в 14 часов 30 минут, на заседании диссертационного совета Д 212.081.21 при ФГАОУВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18, корпус 2, ауд. 217.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н. И. Лобачевского ФГАОУВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет».

Автореферат разослан «__» _____ 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физико-математических наук,
профессор



Задворнов О. А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Диссертация посвящена решению интегродифференциальных уравнений, возникающих в задаче дифракции электромагнитных волн на диэлектрическом теле в свободном пространстве и в задаче дифракции на диэлектрическом теле, помещенном в прямоугольный волновод, методом Галеркина и методом коллокации. Задачи дифракции электромагнитной волны на диэлектрическом теле в свободном пространстве и в волноводе являются актуальными в связи с применением результатов решения в электронике СВЧ, при решении обратной задачи восстановления диэлектрической проницаемости тела в волноводе, исследовании влияния электромагнитного поля на биологические объекты. Данное направление – предмет исследования ряда авторов (А. Б. Самохин, А. С. Ильинский, Ю. Г. Смирнов, Е. Е. Тыртышников). Исследование этой области электродинамики привело к активному и успешному применению численных методов для решения задач дифракции. Однако при всем многообразии исследований до сих пор остались открытыми вопросы об обосновании и сходимости методов. Одной из важнейших является задача построения эффективных, высокоскоростных алгоритмов расчета, использующих современные кластерные технологии.

Цели работы:

- разработка методов Галеркина и коллокации для решения интегродифференциальных уравнений в задачах дифракции электромагнитных волн на неоднородных диэлектрических телах в свободном пространстве и в прямоугольном волноводе;
- программная реализация на суперкомпьютере параллельных вычислительных алгоритмов, позволяющих эффективно решать интегродифференциальные уравнения.

Научная новизна:

- краевые задачи для системы уравнений Максвелла сведены к объемным сингулярным интегродифференциальным уравнениям на диэлектрическом теле, доказаны теоремы о существовании и единственности решений для этих уравнений;
- доказана теорема о сходимости метода Галеркина для решения задачи дифракции на диэлектрическом теле в свободном пространстве, об однозначной разрешимости конечномерных уравнений метода коллокации для решения задачи дифракции на диэлектрическом теле в прямоугольном волноводе;
- предложены и программно реализованы на суперкомпьютере параллельные вычислительные алгоритмы, позволяющие решать задачи дифракции на диэлектрических телах произвольной формы.

Практическая значимость. Большое практическое значение имеют параллельные вычислительные алгоритмы для решения задач дифракции, реализованные на суперкомпьютерных вычислительных комплексах и позволяющие решать задачи с высокой точностью и приемлемым временем ожидания результатов вы-

числений. Важно также и то, что возможно решать задачи дифракции на диэлектрических телах произвольной формы.

Реализация и внедрение полученных результатов. Результаты, полученные в диссертации, включены в отчеты НИР и грантов, выполненных на кафедре математики и суперкомпьютерного моделирования Пензенского государственного университета:

- проект «Разработка методов суперкомпьютерного моделирования и GRID-технологий для определения эффективной диэлектрической и магнитной проницаемости нанокompозитных материалов и наноструктур различной геометрической формы» аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)»;

- проект РФФИ 06-07-89063а «Субиерархические параллельные вычислительные алгоритмы и программное обеспечение для решения трехмерных векторных задач электродинамики»;

- проект в рамках научно-технической программы Союзного государства «Разработка и использование программно-аппаратных средств Грид-технологий перспективных высокопроизводительных (суперкомпьютерных) вычислительных систем семейства “СКИФ”» (шифр «СКИФ-ГРИД») «Web-ориентированный вычислительный комплекс для решения трехмерных задач дифракции электромагнитных волн на основе субиерархических параллельных алгоритмов и GRID-технологий».

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на научных конференциях и семинарах:

- URSI International Symposium on Electromagnetic Theory (EMTS 2010), Berlin, Germany, August 16–19, 2010 г.;

- научном семинаре кафедры математики и суперкомпьютерного моделирования Пензенского государственного университета;

- научном семинаре кафедры вычислительной математики Казанского (Приволжского) федерального университета.

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 6 печатных работ, список которых приведен в конце автореферата, 2 работы – в журналах, рекомендованных ВАК РФ.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, списка литературы, содержащего 66 наименований. Работа изложена на 135 страницах машинописного текста, содержит 30 рисунков и 9 таблиц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приводится обзор работ по теме диссертации и вопросам, примыкающим к ней; обосновывается актуальность темы, формулируется цель работы, излагаются краткое содержание и основные результаты работы.

Первая глава посвящена постановке задач дифракции.

Задача дифракции на теле Q в свободном пространстве формулируется следующим образом. Тело Q характеризуется постоянной магнитной проницаемостью μ_0 и положительной (3×3) -матрицей-функцией (тензором) ди-

электрической проницаемости $\hat{\varepsilon}(x)$. Компоненты $\hat{\varepsilon}(x)$ являются ограниченными функциями в области \bar{Q} , $\hat{\varepsilon} \in L_\infty(Q)$, а также $\hat{\varepsilon}^{-1} \in L_\infty(Q)$. Граница ∂Q области Q кусочно-гладкая. Требуется определить электромагнитное поле $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in L_2(Q)$ (здесь и далее $L_2(Q)$ – декартово произведение трех экземпляров пространства квадратично-суммируемых в Q комплекснозначных функций), возбуждаемое сторонним полем с временной зависимостью вида $e^{-i\omega t}$. Источник стороннего поля – электрический ток $\mathbf{j}^0 \in L_{2,loc}(\mathbb{R}^3)$ с компактным носителем в \mathbb{R}^3 .

Будем искать «слабые» (обобщенные) решения системы уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega \hat{\varepsilon} \mathbf{E} + \mathbf{j}_E^0, \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega \mu_0 \mathbf{H}, x \in \mathbb{R}^3. \quad (1)$$

Если же тензор диэлектрической проницаемости является, например, гладкой функцией, то из справедливости уравнений (1) во всем пространстве следуют условия непрерывности касательных компонент поля при переходе через границу тела:

$$[\mathbf{E}]|_{\partial Q} = [\mathbf{H}]|_{\partial Q} = 0. \quad (2)$$

Кроме того, поля \mathbf{E} и \mathbf{H} должны удовлетворять условиям излучения на бесконечности:

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{E}{H} \right) - ik_0 \left(\frac{E}{H} \right) = o(R^{-1}), \quad \left(\frac{E}{H} \right) = O(R^{-1}), \quad R := |x| \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Здесь k_0 – волновое число свободного пространства (вне \bar{Q}), $k_0^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$.

Задача дифракции на теле Q в прямоугольном волноводе формулируется следующим образом. Пусть в декартовой системе координат $P = \{x : 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b, -\infty < x_3 < +\infty\}$ – волновод с идеально проводящей поверхностью ∂P . В волноводе расположено объемное тело Q ($Q \subset P$ – область), характеризующееся постоянной магнитной проницаемостью μ_0 и положительной (3×3) -матрицей-функцией (тензором) диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}(x)$. Компоненты $\hat{\varepsilon}(x)$ являются ограниченными функциями в области \bar{Q} , $\hat{\varepsilon} \in L_\infty(Q)$, а также $\hat{\varepsilon}^{-1} \in L_\infty(Q)$. Граница ∂Q области Q кусочно-гладкая. Будем также предполагать, что тело Q не касается стенок волновода, $\partial Q \cap \partial P = \emptyset$. В $P \setminus \bar{Q}$ среда изотропна и однородна с по-

стоянными $\varepsilon_0(>0)$, $\mu_0(>0)$. Требуется определить электромагнитное поле $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in L_{2,loc}(P)$ (и, следовательно, $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in L_2(Q)$), возбуждаемое в волноводе сторонним полем с временной зависимостью вида $e^{-i\omega t}$. Источник стороннего поля – электрический ток $\mathbf{j}_E^0 \in L_{2,loc}(P)$ с компактным носителем в P .

В области $P \subset \mathbb{R}^3$ стандартные дифференциальные операторы grad, div, rot понимаются в смысле обобщенных функций. Будем искать «слабые» (обобщенные) решения системы уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega \hat{\varepsilon} \mathbf{E} + \mathbf{j}_E^0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega \mu_0 \mathbf{H}, \quad x \in P. \quad (4)$$

Эти решения должны удовлетворять условиям на бесконечности: поля \mathbf{E} и \mathbf{H} при $|x_3| > C$ для достаточно больших $C > 0$ имеют представление (+ соответствует $+\infty$, – соответствует $-\infty$):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = \sum_p R_p^{(\pm)} e^{i\gamma_p^{(1)}|x_3|} \begin{pmatrix} \lambda_p^{(1)} \Pi_p e_3 - i\gamma_p^{(1)} \nabla_2 \Pi_p \\ -i\omega \varepsilon_0 (\nabla_2 \Pi_p) \times e_3 \end{pmatrix} + \\ + \sum_p Q_p^{(\pm)} e^{i\gamma_p^{(2)}|x_3|} \begin{pmatrix} i\omega \mu_0 (\nabla_2 \Psi_p) \times e_3 \\ \lambda_p^{(2)} \Psi_p e_3 - i\gamma_p^{(2)} \nabla_2 \Psi_p \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где $\gamma_p^{(j)} = \sqrt{k_0^2 - \lambda_p^{(j)}}$, $\operatorname{Im} \gamma_p^{(j)} > 0$ или $\operatorname{Im} \gamma_p^{(j)} = 0$, $k\gamma_p^{(j)} \geq 0$ и $\lambda_p^{(1)}$, $\Pi_p(x_1, x_2)$ и $\lambda_p^{(2)}$, $\Psi_p(x_1, x_2)$ – полная система собственных значений и ортонормированных в $L_2(\Pi)$ собственных функций двумерного оператора Лапласа $-\Delta$ в прямоугольнике $\Pi := \{(x_1, x_2): 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b\}$ с условиями Дирихле и Неймана соответственно и $\nabla_2 \equiv e_1 \partial/\partial x_1 + e_2 \partial/\partial x_2$. Для коэффициентов разложений (5) имеют место оценки

$$R_p^{(\pm)}, Q_p^{(\pm)} = O(p^m), \quad p \rightarrow \infty, \quad (6)$$

для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Для \mathbf{E} , \mathbf{H} должны выполняться краевые условия на стенках волновода:

$$\mathbf{E}_\tau|_{\partial P} = 0, \quad \mathbf{H}_\nu|_{\partial P} = 0. \quad (7)$$

Пусть также \mathbf{E}^0 и \mathbf{H}^0 – решения рассматриваемой краевой задачи в отсутствие неоднородного тела Q , $\hat{\varepsilon}(x) = \varepsilon_0 \hat{I}$, $x \in P$ (\hat{I} – единичный тензор):

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}^0 = -i\omega\varepsilon_0 \mathbf{E}^0 + \mathbf{j}_E^0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}^0 = i\omega\mu_0 \mathbf{H}^0, \quad (8)$$

с краевыми условиями:

$$\mathbf{E}_\tau^0|_{\partial P} = 0, \quad \mathbf{H}_\nu^0|_{\partial P} = 0. \quad (9)$$

Эти решения могут быть выражены аналитически через \mathbf{j}_E^0 с помощью введенного ниже тензора Грина. Решения не обязаны удовлетворять условиям на бесконечности. Например, \mathbf{E}^0 и \mathbf{H}^0 могут быть ТМ- или ТЕ-модой этого волновода.

Имеют место результаты о гладкости решений задач (4)–(7) и (8)–(9) при более гладких данных.

Утверждение 1.1. Пусть $\mathbf{j}_E^0 \in H^1 \operatorname{loc}(P)$. Тогда $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0 \in H^1 \operatorname{loc}(P)$. Пусть, кроме того, $\partial Q \in C^2$, $\hat{\varepsilon} \in C^1(\bar{Q})$. Тогда сужения $\mathbf{E}|_Q, \mathbf{H}|_Q \in H^1(Q)$ и $\mathbf{E}|_{P \setminus Q}, \mathbf{H}|_{P \setminus Q} \in H^1 \operatorname{loc}(P \setminus Q)$. Кроме того, справедливы условия сопряжения на ∂Q :

$$[\mathbf{E}_\tau]|_{\partial Q} = 0, \quad [\mathbf{H}_\tau]|_{\partial Q} = 0,$$

где $[\cdot]$ означает разность следов с разных сторон ∂Q .

Аналогичный результат имеет место для задачи (1)–(3).

Во второй главе описаны тензоры Грина, используемые для перехода к интегродифференциальным уравнениям, и основные свойства этих тензоров. Диагональный тензор Грина \hat{G}_E для свободного пространства, компоненты которого являются фундаментальными решениями уравнения Гельмгольца с коэффициентом k_0^2 и удовлетворяют условиям на бесконечности, имеет вид:

$$\hat{G}_E = \begin{pmatrix} G & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{pmatrix}, \quad G(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik_0|x-y|}}{|x-y|}.$$

Выделив особенность в компонентах тензора Грина, получим:

$$G(r) = G_0(r) + G_1(r), \quad r = |x - y|; \quad G_0(r) = \frac{e^{ik_0 r} - 1}{4\pi r}, \quad G_1(r) = \frac{1}{4\pi r}.$$

Диагональный тензор Грина \hat{G}_E для прямоугольного волновода, компоненты которого являются фундаментальными решениями уравнения Гельмгольца в P с коэффициентом k_0^2 и удовлетворяют краевым условиям первого или второго рода на ∂P (обеспечивающим обращение в нуль тангенциальных

составляющих напряженности электрического поля на стенках волновода) и условиям на бесконечности, имеет вид:

$$\hat{G}_E = \begin{pmatrix} G_E^1 & 0 & 0 \\ 0 & G_E^2 & 0 \\ 0 & 0 & G_E^3 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} G_E^1 &= \frac{2}{ab} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{nm}|x_3-y_3|}}{\gamma_{nm}(1+\delta_{0n})} \cos \frac{\pi n}{a} x_1 \sin \frac{\pi m}{b} x_2 \cos \frac{\pi n}{a} y_1 \sin \frac{\pi m}{b} y_2, \\ G_E^2 &= \frac{2}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{nm}|x_3-y_3|}}{\gamma_{nm}(1+\delta_{0m})} \sin \frac{\pi n}{a} x_1 \cos \frac{\pi m}{b} x_2 \sin \frac{\pi n}{a} y_1 \cos \frac{\pi m}{b} y_2, \\ G_E^3 &= \frac{2}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{nm}|x_3-y_3|}}{\gamma_{nm}} \sin \frac{\pi n}{a} x_1 \sin \frac{\pi m}{b} x_2 \sin \frac{\pi n}{a} y_1 \sin \frac{\pi m}{b} y_2. \end{aligned} \quad (10)$$

В этих выражениях $\gamma_{nm} = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 - k_0^2}$, при этом ветвь квадратного корня выбирается так, чтобы $\text{Im} \gamma_{nm} \geq 0$.

Утверждение 2.1. Тензор Грина \hat{G}_E допускает представление

$$\hat{G}_E = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik_0|x-y|}}{|x-y|} \hat{I} + \hat{g}(x, y), \quad x, y \in P, \quad (11)$$

где матрица-функция (тензор) $\hat{g} \in C^\infty(\bar{Q} \times \bar{P})$ и $\hat{g} \in C^\infty(\bar{P} \times \bar{Q})$.

В третьей главе осуществлено сведение задач дифракции к интегродифференциальным уравнениям на теле. Этот подход позволяет перейти от решения краевых задач в неограниченной области к решению уравнений на ограниченном теле, что позволит в дальнейшем применить методы Галеркина и коллокации для численного решения задач.

Пусть решения краевых задач (1), (3), (4)–(7) существуют и единственны. Перепишем (1) и (4) в эквивалентной форме:

$$\text{rot } \mathbf{H} = -i\omega \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{j}_E, \quad \text{rot } \mathbf{E} = i\omega \mu_0 \mathbf{H}, \quad (12)$$

где $\mathbf{j}_E = \mathbf{j}_E^0 + \mathbf{j}_E^p$.

В последнем равенстве $\mathbf{j}_E^p = -i\omega(\hat{\varepsilon}(x) - \varepsilon_0 \hat{I})\mathbf{E}$ – электрический ток поляризации.

Нетрудно проверить, что решение краевых задач (12), (3) и (12), (5)–(7) имеет вид

$$\mathbf{E} = i\omega\mu_0\mathbf{A}_E - \frac{1}{i\omega\epsilon_0}\text{grad div } \mathbf{A}_E, \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}_E, \quad (13)$$

где

$$\mathbf{A}_E = \int_P \widehat{G}_E(r) \mathbf{j}_E(y) dy - \quad (14)$$

векторный потенциал электрического тока. Потенциал \mathbf{A}_E удовлетворяет уравнению

$$\Delta \mathbf{A}_E + k_0^2 \mathbf{A}_E = -\mathbf{j}_E.$$

Таким образом, потенциал \mathbf{A}_E , обеспечивающий выполнение требуемых краевых условий для полей, есть свертка с тензором Грина для уравнения Гельмгольца. Из соотношений (13)–(14) для поля \mathbf{E} следует интегродифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) = & \mathbf{E}^0(x) + k_0^2 \int_Q \widehat{G}_E(r) \left(\frac{\widehat{\epsilon}(y)}{\epsilon_0} - \widehat{I} \right) \mathbf{E}(y) dy + \\ & + \text{grad div} \int_Q \widehat{G}_E(r) \left(\frac{\widehat{\epsilon}(y)}{\epsilon_0} - \widehat{I} \right) \mathbf{E}(y) dy, \quad x \in Q, \end{aligned} \quad (15)$$

где $\mathbf{E}(y) = (E_1(y), E_2(y), E_3(y))^T$ – вектор электрического поля; $y = (y_1, y_2, y_3)$ – точка в пространстве \mathbb{R}^3 ; \widehat{I} – единичная (3×3) -матрица; $\widehat{\epsilon}(y)/\epsilon_0$ – тензор (относительной) диэлектрической проницаемости. Кроме того:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) = & \mathbf{E}^0(x) + k_0^2 \int_Q \widehat{G}_E(r) \left(\frac{\widehat{\epsilon}(y)}{\epsilon_0} - \widehat{I} \right) \mathbf{E}(y) dy + \\ & + \text{grad div} \int_Q \widehat{G}_E(r) \left(\frac{\widehat{\epsilon}(y)}{\epsilon_0} - \widehat{I} \right) \mathbf{E}(y) dy, \quad x \in P \setminus Q \ (\mathbb{R}^3 \setminus Q). \end{aligned}$$

Последняя формула дает представление решения $\mathbf{E}(x)$ в области $P \setminus Q$ ($\mathbb{R}^3 \setminus Q$), если $\mathbf{E}(y)$, $y \in Q$ – решение уравнения (15).

Вводя обозначение $\mathbf{J}(y) = \left(\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right) \mathbf{E}(y)$ для электрического тока

$$\mathbf{J}(y) = (J_1(y), J_2(y), J_3(y))^T, \text{ откуда } \mathbf{E}(y) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(y) \mathbf{J}(y), \hat{\boldsymbol{\theta}}(y) = \left(\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right)^{-1},$$

получаем уравнение в виде

$$\begin{aligned} A\mathbf{J} &\equiv \hat{\boldsymbol{\theta}}(x) \mathbf{J}(x) - k_0^2 \int_Q \hat{G}_E(x, y) \mathbf{J}(y) dy - \\ &- \text{grad div} \int_Q \hat{G}_E(x, y) \mathbf{J}(y) dy = \mathbf{E}^0(x), \quad x \in Q. \end{aligned} \quad (16)$$

В ряде случаев уравнение (16) (для токов) предпочтительнее, чем уравнение (для полей). Эти уравнения эквивалентны (при сделанных предположениях относительно параметров задач), и решения одного уравнения легко выражаются через решения другого.

Рассмотрим оператор, отвечающий уравнению (16):

$$A_0 \mathbf{J} = k_0^2 \int_Q \hat{G}_E(x, y) \mathbf{J}(y) dy + \text{grad div} \int_Q \hat{G}_E(x, y) \mathbf{J}(y) dy. \quad (17)$$

Сведем полученное интегродифференциальное уравнение (15) к объемному векторному сингулярному интегральному уравнению.

Представим функцию Грина в виде

$$\begin{aligned} \hat{G}_E(r) &= \hat{G}_0(r) + \hat{G}_1(r) + \hat{G}_2(r), \quad r = |x - y|, \\ \hat{G}_0(r) &= \frac{e^{ik_0 r} - 1}{4\pi r} \hat{I}, \quad \hat{G}_1(r) = \frac{1}{4\pi r} \hat{I}, \quad \hat{G}_2(r) = \text{diag}\{g^1, g^2, g^3\}, \end{aligned}$$

где g^1, g^2, g^3 — гладкие функции.

Переходим от интегродифференциального уравнения (15) к векторному сингулярному интегральному уравнению

$$(I + S - K) \mathbf{E} = \mathbf{E}^0, \quad (18)$$

где операторы S и K определяются по формулам:

$$\begin{aligned} (S\mathbf{E})(x) &= \frac{1}{3} \left(\frac{\hat{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right) \mathbf{E}(x) - v.p. \int_Q \hat{\Gamma}_1(x, y) \left(\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right) \mathbf{E}(y) dy, \\ (K\mathbf{E})(x) &= \int_Q \hat{\Gamma}(x, y) \left(\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right) \mathbf{E}(y) dy + \int_Q \hat{\Gamma}_2(x, y) \left(\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right) \mathbf{E}(y) dy. \end{aligned}$$

Здесь тензоры $\hat{\Gamma}$, $\hat{\Gamma}_1$, $\hat{\Gamma}_2$ имеют вид

$$\hat{\Gamma} = k_0^2 \hat{G}_E(r) + (\cdot, \text{grad}) \text{grad } G_0(r), \quad \hat{\Gamma}_1 = (\cdot, \text{grad}) \text{grad } G_1(r),$$

$$(\hat{\Gamma}_2)_{ij} = \frac{\partial^2 g^j(r)}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Таким образом, решения краевых задач дифракции сведены к решению интегродифференциального уравнения (15) или объемного сингулярного интегрального уравнения (18) (при этом тензоры Грина для этих двух задач будут различными). Имеет место теорема об эквивалентности краевой задачи дифракции и сингулярного интегрального уравнения.

Теорема 3.1. Пусть тело Q с кусочно-гладкой границей ∂Q характеризуется положительным тензором диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon} \in L_\infty(Q)$ и $\hat{\varepsilon}^{-1} \in L_\infty(Q)$. Пусть \mathbf{E} , \mathbf{H} и \mathbf{E}^0 , \mathbf{H}^0 – единственные решения краевых задач (1), (3), ((4)–(7)) и (8)–(9) соответственно. Тогда существует и единственно решение $\mathbf{E} \in L_2(Q)$ уравнения (18). Обратно, если $\mathbf{E} \in L_2(Q)$ – решение интегрального уравнения (18), то формулы (12)–(14), (15) дают решение краевых задач для системы уравнений Максвелла (1), удовлетворяющее условию (3), и для системы уравнений Максвелла (4), удовлетворяющее условию (6).

Вопрос о разрешимости уравнения (18) устанавливается в следующей теореме.

Теорема 3.2. Пусть однородное уравнение (18) имеет только тривиальное решение и тензор диэлектрической проницаемости таков, что

$$\text{ess sup}_{x \in Q} \left(\sum_{l,n=1}^3 \left| \frac{\varepsilon_{ln}(x)}{\varepsilon_0} - \delta_{ln} \right|^2 \right)^{1/2} < \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}} \right)^{-1}. \quad (19)$$

Тогда уравнение (18) однозначно разрешимо для любой правой части $\mathbf{E}^0 \in L_2(Q)$.

Далее рассмотрим метод псевдодифференциальных операторов для анализа уравнения электрического поля (16). Обозначим:

$$t(\xi) = \frac{1}{2i|\xi|} \sum_{k=0}^l (k+1) \frac{(1 - ik_0 + i|\xi|)^{k+1} - (1 - ik_0 - i|\xi|)^{k+1}}{\left((1 - ik_0)^2 + |\xi|^2 \right)^{k+1}}, \quad (20)$$

$$\mathbf{dt}(\xi) = -t(\xi) \begin{pmatrix} \xi_1^2 - k_0^2 & \xi_1 \xi_2 & \xi_1 \xi_3 \\ \xi_1 \xi_2 & \xi_2^2 - k_0^2 & \xi_2 \xi_3 \\ \xi_1 \xi_3 & \xi_2 \xi_3 & \xi_3^2 - k_0^2 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Уравнение (16) как псевдодифференциальное запишется в виде

$$A\mathbf{J} = \mathbf{E}^0, \quad (22)$$

где

$$A\mathbf{J} = \frac{1}{(2\pi)^3} \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} (\hat{\boldsymbol{\theta}}(x) - \mathbf{dt}(\xi)) \mathbf{J}(y) dy d\xi, \quad (23)$$

$\mathbf{dt}(\xi)$ определяется формулой (21).

Полагаем, что

$$\det(\hat{\varepsilon} - \hat{I}) \neq 0, x \in \bar{Q} \quad (24)$$

(это соответствует физическим ограничениям) и

$$\Delta(x) \equiv \sum_{i,j=1}^3 \cos \alpha_i \cos \alpha_j \varepsilon_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(x), x \in \bar{Q}. \quad (25)$$

Определим пространства Соболева:

$$H^s(Q) := \{u|_Q : u \in H^s(\mathbb{R}^2)\} \text{ и } \tilde{H}^s(\bar{Q}) := \{u \in H^s(\mathbb{R}^2) : \text{supp } u \subset \bar{Q}\}.$$

Теорема 3.3. *Оператор $A: \tilde{H}^s(\bar{Q}) \rightarrow H^s(Q)$, $s \geq 0$, определенный по формуле (23), является эллиптическим ПДО нулевого порядка при условиях (24) и (25).*

Теперь сформулируем результат о фредгольмовости этого оператора.

Теорема 3.4. *Пусть выполнены условия (24) и (25). Тогда, если дополнительно выполнено одно из двух условий (26) или (27):*

$$\text{Re } \hat{\varepsilon}(x) v \cdot \bar{v} \geq (C_2 + 1) |v|^2, \text{ при } x \in \bar{Q} \text{ и } C_2 > 0, \quad (26)$$

$$\text{Im } \hat{\varepsilon}(x) v \cdot \bar{v} \geq C_3 |v|^2, \text{ при } x \in \bar{Q}, \quad (27)$$

то оператор $A: L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$, определенный формулой (23), является фредгольмовым с нулевым индексом.

В четвертой главе рассматриваются численные методы решения интегродифференциальных уравнений. Для случая свободного пространства используется метод Галеркина, для случая прямоугольного волновода – метод коллокации.

Пусть X – нормированное пространство и $U \subset X$ – нетривиальное подпространство.

Для уравнения $A\varphi = f$, $(\varphi, f \in X)$ в пространстве X метод Галеркина формулируется следующим образом. Приближенное решение $\varphi_n \in X_n$ определяется из уравнения $P_n A\varphi_n = P_n f$. Здесь $\varphi_n \in X_n$ (X_n есть n -мерное подпространство пространства X), $P_n : X \rightarrow X_n$ – оператор ортогонального проектирования на конечномерное подпространство. Пусть подпространства X_n являются линейными оболочками базисных функций: $X_n = \text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$. Потребуем, чтобы для выбранных базисных функций выполнялось *условие аппроксимации*:

$$\inf_{\psi \in X_n} \|\psi - \varphi\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (28)$$

Уравнение $P_n A\varphi_n = P_n f$ эквивалентно следующему:

$$(A\varphi_n, v_l)_X = (f, v_l)_X, \quad l = 1, \dots, n,$$

где $(\cdot, \cdot)_X$ – скалярное произведение в X .

Представим приближенное решение в виде линейной комбинации базисных функций: $\varphi_n = \sum_{k=1}^n c_k v_k$. Подставив это представление в схему Галеркина, получим систему линейных алгебраических уравнений для отыскания неизвестных коэффициентов c_k :

$$\sum_{k=1}^n c_k (Av_k, v_l)_X = (f, v_l)_X, \quad l = 1, \dots, n.$$

Определение 4.1. Метод Галеркина будем называть *сходящимся* для оператора A , если существует число N , такое, что для каждого $f \in \text{Im } A$ приближенные уравнения $(A\varphi_n, v_l)_X = (f, v_l)_X$, $l = 1, \dots, n$, имеют единственное решение $\varphi_n \in X_n$ для всех $n \geq N$, и если эти решения сходятся $\varphi_n \rightarrow \varphi$ при $n \rightarrow \infty$ к единственному решению φ уравнения $A\varphi = f$. Тогда имеет место *квазиоптимальная оценка скорости сходимости*:

$$\|\varphi_n - \varphi\| \leq C \inf_{\psi \in X_n} \|\psi - \varphi\|.$$

В рассматриваемом случае $X = L_2(Q)$.

Теорема 4.1. Пусть однородное уравнение (18) имеет только тривиальное решение и тензор диэлектрической проницаемости таков, что

$$\text{ess sup}_{x \in Q} \left(\sum_{l,n=1}^3 \left| \frac{\varepsilon_{ln}(x)}{\varepsilon_0} - \delta_{ln} \right|^2 \right)^{1/2} < \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}} \right)^{-1},$$

и выполнено условие аппроксимации. Тогда для любой правой части $\mathbf{E}^0 \in L_2(Q)$ метод Галеркина сходится для уравнения (18).

Таким образом, метод Галеркина для уравнения (18) будет сходиться при любом выборе базисных функций, обладающих условием аппроксимации.

Рассмотрим теперь вопрос о построении схемы Галеркина для рассматриваемой задачи дифракции. Будем предполагать, что матрица $\left(\frac{\hat{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right)$ обра-

тима в \bar{Q} , $\left(\frac{\hat{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right)^{-1} \in L_\infty(Q)$, \hat{I} – единичная матрица. Будем рассматривать уравнение (22).

Определим компоненты приближенного решения $\mathbf{J}_n = (J_n^1, J_n^2, J_n^3)$ следующим образом:

$$J_n^1 = \sum_{k=1}^N a_k f_k^1(x), \quad J_n^2 = \sum_{k=1}^N b_k f_k^2(x), \quad J_n^3 = \sum_{k=1}^N c_k f_k^3(x),$$

где f_k^i – базисные функции-«крышки», существенно зависящие лишь от переменной x_i . Ниже проводится построение функций f_k^1 . Будем считать, что Q – параллелепипед: $Q = \{x : a_1 < x_1 < a_2, \quad b_1 < x_2 < b_2, \quad c_1 < x_3 < c_2\}$. Разобьем Q параллелепипедами:

$$\Pi_{klm}^1 = \{x : x_{1,k-1} < x_1 < x_{1,k+1}, \quad x_{2,l} < x_2 < x_{2,l+1}, \quad x_{3,m} < x_3 < x_{3,m+1}\};$$

$$x_{1,k} = a_1 + \frac{a_2 - a_1}{n} k, \quad x_{2,l} = b_1 + 2 \frac{b_2 - b_1}{n} l, \quad x_{3,k} = c_1 + 2 \frac{c_2 - c_1}{n} m,$$

где $k = 1, \dots, n-1$; $l, m = 1, \dots, n/2-1$.

Обозначив $h_1 := |x_{1,k} - x_{1,k-1}|$, получим формулы для f_{klm}^1 :

$$f_{klm}^1 = \begin{cases} 1 - \frac{1}{h_1} |x_1 - x_{1,k}|, & x \in \bar{\Pi}_{klm}^1, \\ 0, & x \notin \bar{\Pi}_{klm}^1. \end{cases}$$

Функции f_{klm}^2, f_{klm}^3 , зависящие от переменных x_2 и x_3 соответственно, определяются аналогичными соотношениями. Из определения базисных функций следует, что каждая компонента вектора приближенного решения обращается в

нуль на одной из граней Q . Построенное множество базисных функций удовлетворяет требуемому условию аппроксимации в $L_2(Q)$.

Расширенную матрицу для нахождения неизвестных коэффициентов a_k, b_k, c_k удобно представить в блочной форме:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_3 \end{pmatrix},$$

элементы колонок B_k и матриц A_{kl} определяются из соотношений:

$$\begin{aligned} B_k^i &= (E_0^k, f_i^k), \\ A_{kl}^{ij} &= \int_{\Pi_j^l \cap \Pi_i^k} \xi_{kl} f_j^l(x) f_i^k(x) dx - \delta_{kl} k_0^2 \int_{\Pi_i^k} \int_{\Pi_j^l} G(x, y) f_j^l(y) f_i^k(x) dy dx + \\ &+ \int_{\Pi_i^k} \int_{\Pi_j^l} G(x, y) \frac{\partial}{\partial y_l} f_j^l(y) \frac{\partial}{\partial x_k} f_i^k(x) dy dx, \\ k, l &= 1, 2, 3; i, j = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (29)$$

Предложенный метод Галеркина реализован для решения задач дифракции на диэлектрическом теле в свободном пространстве.

Рассмотрим процедуру формирования матрицы коэффициентов в методе Галеркина. Пусть Q – куб с ребром h . Интегрирование производится численным методом по квадратурной формуле прямоугольников. Интеграл по паре кубиков $\Pi^{(1)}, \Pi^{(2)}$ от функции $f_0(x, y)$ вычисляется по формуле

$$\int_{\Pi^{(1)}} \int_{\Pi^{(2)}} f_0(x, y) dx dy = \sum_{k, m}^{n, n+1} f(x^{(k)}, y^{(m)}) \Delta_1^3 \Delta_2^3,$$

$$\begin{aligned} \text{где } x &= (x_1, x_2, x_3), \quad y = (y_1, y_2, y_3), \quad \Delta_1 = \frac{h}{n}, \quad \Delta_2 = \frac{h}{n+1}, \\ x_1^{(k)} &= x_1^{(c)} - \frac{h}{2} + k \cdot \Delta_1 + \frac{\Delta_1}{2}, \quad y_1^{(m)} = y_1^{(c)} - \frac{h}{2} + m \cdot \Delta_2 + \frac{\Delta_2}{2}, \\ x_2^{(k)} &= x_2^{(c)} - \frac{h}{2} + k \cdot \Delta_1 + \frac{\Delta_1}{2}, \quad y_2^{(m)} = y_2^{(c)} - \frac{h}{2} + m \cdot \Delta_2 + \frac{\Delta_2}{2}, \\ x_3^{(k)} &= x_3^{(c)} - \frac{h}{2} + k \cdot \Delta_1 + \frac{\Delta_1}{2}, \quad y_3^{(m)} = y_3^{(c)} - \frac{h}{2} + m \cdot \Delta_2 + \frac{\Delta_2}{2}. \end{aligned}$$

Здесь $(x_1^{(c)}, x_2^{(c)}, x_3^{(c)})$, $(y_1^{(c)}, y_2^{(c)}, y_3^{(c)})$ – центры кубиков $\Pi^{(1)}, \Pi^{(2)}$. В случае совпадения носителей при интегрировании второго и третьего инте-

гралов (29) возникает слабая особенность, поэтому при численном интегрировании в одном из носителей выбирается n точек интегрирования (метод прямоугольников с выбором средней точки), а во втором $n+1$ точек – по каждому направлению. Это приводит к избавлению от особенности за счет несовпадения узлов интегрирования.

Для уравнения $A\varphi = f$ ($\varphi, f \in X$) в гильбертовом пространстве X рассмотрим метод коллокации, который формулируется следующим образом. Приближенное решение $\varphi_n \in X_n$ определяется из уравнения $P_n A\varphi_n = P_n f$. Здесь $\varphi_n \in X_n$ (X_n есть n -мерное подпространство пространства X), $P_n : X \rightarrow X_n$ – оператор проектирования на конечномерное подпространство.

Разобьем область Q на элементарные подобласти Q_i с кусочно-гладкими границами ∂Q_i так, чтобы выполнялись условия $Q_i \cap Q_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и $\overline{Q} = \bigcup_i \overline{Q_i}$. Выберем в каждой подобласти Q_i точку (узел) коллокации x^i . Рассмотрим базисные функции $v_i = \begin{cases} 1, & x \in Q_i \\ 0, & x \notin Q_i \end{cases}$. Пусть подпространства X_n являются линейными оболочками базисных функций: $X_n = \text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$. Потребуем, чтобы для выбранных базисных функций выполнялось условие аппроксимации:

$$\forall x \in X \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{\bar{x} \in X_n} \|x - \bar{x}\| = 0.$$

Проектор $P_n : X \rightarrow X_n$ определим так: $(P_n \varphi)(x) = \varphi(x^i)$, $x \in Q_i$. Заметим, что при таком определении проектора не определены значения функций $(P_n \varphi)(x)$ при $x \in \partial Q_i$, но это не будет важно, так как в рассматриваемом случае $X = L_2$.

Уравнение $P_n A\varphi_n = P_n f$ эквивалентно следующему:

$$(A\varphi_n)(x^j) = f(x^j), \quad j = 1, \dots, n.$$

Представим приближенное решение в виде линейной комбинации базисных функций: $\varphi_n = \sum_{k=1}^n c_k v_k$. Подставив это представление в схему метода коллокации, получим систему линейных алгебраических уравнений для отыскания неизвестных коэффициентов c_k :

$$\sum_{k=1}^n c_k (A v_k)(x^j) = f(x^j), \quad j = 1, \dots, n.$$

Основная трудность применения метода коллокации связана с тем, что в качестве пространства X рассматривается пространство $L_2(Q)$, в котором значения функции в точке, вообще говоря, не определены. Таким образом, оператор проектирования $P_n : X \rightarrow X_n$ определен не на всем пространстве X и не ограничен. Это приводит к тому, что нельзя применить стандартные утверждения о сходимости проекционных методов. Однако в нашем случае правая часть f является гладкой функцией и функция $A\varphi_n$ тоже будет определена в точках коллокации.

Рассмотрим вопрос о построении схемы метода коллокации для рассматриваемой задачи дифракции. Будем предполагать, что матрица $\begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}(x) - \hat{I} \\ \varepsilon_0 \end{pmatrix}$ обра-

тима в \bar{Q} , $\left(\frac{\hat{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right)^{-1} \in C(\bar{Q})$, \hat{I} – единичная матрица. Рассмотрим уравнение (22).

Определим компоненты приближенного решения $\mathbf{J}_n = (J_n^1, J_n^2, J_n^3)$ следующим образом:

$$J_n^1 = \sum_{k=1}^n a_k f_k(x), \quad J_n^2 = \sum_{k=1}^n b_k f_k(x), \quad J_n^3 = \sum_{k=1}^n c_k f_k(x),$$

где f_k – базисные функции-«ступеньки».

Проведем построение функций f_k . Будем считать, что Q – параллелепипед: $Q = \{x : a_1 < x_1 < a_2, \quad b_1 < x_2 < b_2, \quad c_1 < x_3 < c_2\}$.

Разобьем Q элементарными параллелепипедами:

$$\Pi_{klm} = \{x : x_{1,k} < x_1 < x_{1,k+1}, \quad x_{2,l} < x_2 < x_{2,l+1}, \quad x_{3,m} < x_3 < x_{3,m+1}\},$$

$$x_{1,k} = a_1 + \frac{a_2 - a_1}{n}(k-1), \quad x_{2,l} = b_1 + \frac{b_2 - b_1}{n}(l-1), \quad x_{3,m} = c_1 + \frac{c_2 - c_1}{n}(m-1),$$

где $k, l, m = 1, \dots, n$. Получим формулы для f_{klm} : $f_{klm} = \begin{cases} 1, & x \in \Pi_{klm}, \\ 0, & x \notin \Pi_{klm}. \end{cases}$

Построенное множество базисных функций удовлетворяет необходимому условию аппроксимации в $L_2(Q)$.

Конечномерную систему уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов a_k, b_k, c_k удобно представить в блочной форме:

$$A_N u = b, \quad (30)$$

$$A_N = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix},$$

где элементы столбцов B_k и матриц A_{kl} определяются из соотношений:

$$B_k^i = E_0^k(x_i),$$

$$A_{kl}^{ij} = \delta_{ij} \xi_{kl} - \delta_{kl} k_0^2 \int_Q G^k(x^j, y) f_i(y) dy - \frac{\partial}{\partial x_k} \int_Q \frac{\partial}{\partial x_l} G^l(x^j, y) f_i(y) dy, \quad (31)$$

а координаты точки коллокации имеют вид

$$x^i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}), \quad x_{i1} = (i_1 + 1/2)h_1, \quad x_{i2} = (i_2 + 1/2)h_2, \quad x_{i3} = (i_3 + 1/2)h_3, \\ h_1 = \frac{a_2 - a_1}{n}, \quad h_2 = \frac{b_2 - b_1}{n}, \quad h_3 = \frac{c_2 - c_1}{n}, \quad k, l = 1, 2, 3; \quad i, j = 1, \dots, N; \quad N = n^3.$$

Таким образом, представлены расчетные формулы для матричных коэффициентов метода коллокации для решения сингулярного интегродифференциального уравнения.

Значения матричных коэффициентов действительно могут быть вычислены в точках коллокации $x^i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3})$.

Утверждение 4.1. *Существует константа M , такая, что для коэффициентов (31) верно неравенство $|A_{kl}^{ij}| \leq M$, причем M не зависит от h_1, h_2, h_3 и i, j, k, l .*

Теорема 4.2. *Пусть тензор $\hat{\varepsilon}(x) \in C(\bar{Q})$ диагональный, вещественнозначный и $\varepsilon^{ll}(x) > \varepsilon_0, x \in \bar{Q} (l = 1, 2, 3)$. Тогда существует N_0 , такое, что при $N \geq N_0$ решения уравнений (30) существуют и единственны.*

Доказанная теорема 4.2 устанавливает разрешимость конечномерных уравнений в методе коллокации при некоторых ограничениях на тензор $\hat{\varepsilon}(x)$. Заметим, что эти ограничения выделяют широкий класс диэлектриков, используемых на практике.

Рассмотрим процедуру формирования матрицы коэффициентов в методе коллокации.

Проинтегрировав компоненты тензора Грина по параллелепипеду

$P_{i_1 i_2 i_3} = \{(x_1, x_2, x_3) : i_1 \leq \frac{x_1}{h_1} \leq i_1 + 1, i_2 \leq \frac{x_2}{h_2} \leq i_2 + 1, i_3 \leq \frac{x_3}{h_3} \leq i_3 + 1\}$ и обозначив их через G_1, G_2, G_3 , будем иметь:

$$\begin{aligned}
G_1 &= \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{nm}^0(x_3)}{\gamma_{nm}^2 nm} \cos(nX_1) \sin(mX_2) \cos(nH_1(i_1 + 0, 5)) \times \\
&\quad \times \sin\left(\frac{nH_1}{2}\right) \sin(mH_2(i_2 + 0, 5)) \sin\left(\frac{mH_2}{2}\right) + \\
&\quad + \frac{2H_2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{0m}^0(x_3)}{\gamma_{0m}^2 n} \sin(mX_2) \sin(mH_2(i_2 + 0, 5)) \sin\left(\frac{mH_2}{2}\right), \\
G_2 &= \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{nm}^0(x_3)}{\gamma_{nm}^2 nm} \sin(nX_1) \cos(mX_2) \sin(nH_1(i_1 + 0, 5)) \times \\
&\quad \times \sin\left(\frac{nH_1}{2}\right) \cos(mH_2(i_2 + 0, 5)) \sin\left(\frac{mH_2}{2}\right) + \\
&\quad + \frac{2H_1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{n0}^0(x_3)}{\gamma_{n0}^2 m} \sin(nX_1) \sin(nH_1(i_1 + 0, 5)) \sin\left(\frac{nH_1}{2}\right), \\
G_3 &= \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{nm}^0(x_3)}{\gamma_{nm}^2 nm} \sin(nX_1) \sin(mX_2) \sin(nH_1(i_1 + 0, 5)) \times \\
&\quad \times \sin\left(\frac{nH_1}{2}\right) \sin(mH_2(i_2 + 0, 5)) \sin\left(\frac{mH_2}{2}\right).
\end{aligned}$$

Здесь $X_1 = \frac{\pi x_1}{a}$, $X_2 = \frac{\pi x_2}{b}$, $Y_1 = \frac{\pi y_1}{a}$, $Y_2 = \frac{\pi y_2}{b}$, $H_1 = \frac{\pi h_1}{a}$, $H_2 = \frac{\pi h_2}{b}$,

$$x_1 = j_1 h_1, \quad x_2 = j_2 h_2, \quad y_1 = i_1 h_1, \quad y_2 = i_2 h_2, \quad \gamma_{nm} = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 - k_0^2},$$

$$f_{nm}^0(x_3) = \begin{cases} \left(\exp(-(x_3 - (i_3 + 1)h_3)\gamma_{nm}) - \exp(-(x_3 - i_3 h_3)\gamma_{nm}) \right), & x_3 > (i_3 + 1)h_3, \\ \left(\exp(-(i_3 h_3 - x_3)\gamma_{nm}) - \exp(-((i_3 + 1)h_3 - x_3)\gamma_{nm}) \right), & x_3 < i_3 h_3, \\ \left(2 - \exp(-(x_3 - i_3 h_3)\gamma_{nm}) - \exp(-((i_3 + 1)h_3 - x_3)\gamma_{nm}) \right), & i_3 h_3 < x_3 < (i_3 + 1)h_3. \end{cases}$$

В представлениях для функций G_1 , G_2 , G_3 аналитически суммируются медленно сходящиеся части рядов, что позволяет эффективно вычислять приближенные суммы соответствующих рядов (и все матричные коэффициенты (30)), так как оставшиеся ряды сходятся быстро (экспоненциально).

Рассмотрим свойство симметрии матрицы, получаемой при решении задачи с использованием метода Галеркина. Для уменьшения времени на работу алгоритма программы и объема занимаемой памяти учитывается симметрия матрицы – достаточно вычислить и хранить в памяти коэффициенты блоков A_{11} и A_{12} .

Вычисление и хранение только двух блоков матрицы уменьшает время вычисления коэффициентов и необходимый объем для их хранения в 4,5 раза. Общее количество коэффициентов блоков A_{11} и A_{12} матрицы вычисляется по формуле $N = m^6 \cdot 2$, где m – количество интервалов разбиения всей области по одной координате.

Для упрощения передачи данных между узлами суперкомпьютерного комплекса все коэффициенты блоков A_{11} и A_{12} матрицы хранятся в одномерном массиве $\{A_I\}$.

Учтена симметрия матрицы, получаемой при решении задачи с использованием метода коллокации.

Рассмотрим параллельный алгоритм формирования матрицы. Для получения численных результатов решения задачи дифракции использовался параллельный алгоритм для многопроцессорных кластеров и распределенных вычислительных систем. Неизбежность использования подобных алгоритмов вызвана большим объемом вычислительной работы. Последнее обстоятельство обусловлено, прежде всего, трехмерным и векторным характером задачи, ее численное решение приводит к плотным матрицам большой размерности (порядка тысяч и десятков тысяч), при которых эффективно (за приемлемое время) применение параллельных версий решения систем линейных алгебраических уравнений методом сопряженных градиентов. Однако большую трудность представляет не решение системы, а получение коэффициентов: элементы матрицы представляются либо через шестикратные интегралы (задача для свободного пространства с использованием метода Галеркина), либо через сложные двойные ряды (задача для прямоугольного волновода с использованием метода коллокации).

В пятой главе представлены результаты расчетов и особенности реализации программ.

Представлены результаты по вычислению коэффициентов матрицы, получаемой при использовании метода Галеркина. Для запуска программы были использованы вычислительные ресурсы суперкомпьютерного комплекса СКИФ МГУ «Чебышёв». Основное требование при запуске на кластере данного комплекса – определить до запуска время расчета, когда программа гарантированно завершит работу.

С учетом доступного объема оперативной памяти и рассчитанного значения необходимого объема для хранения всех векторов выбранное значение m не должно превышать 16.

Предложенный алгоритм был запрограммирован на языке C++, для распараллеливания алгоритма использовалась система параллельного программиро-

вания Message Passing Interface в реализации OpenMPICH для операционной системы Linux. Произведено несколько модельных запусков программы при разном количестве процессов. На рис. 1 показано время вычисления (в секундах) в серии модельных запусков при $m = 4$, $n = 3$ и разных количествах используемых процессов, где m – количество интервалов разбиения, n – количество интервалов интегрирования по каждой координате.

С учетом времени расчета при модельных запусках определено гарантированное время расчета $m = 8$, $n = 10$ при количестве использованных процессов, равном 100.

При заполнении блоков A_{11} и A_{12} на суперкомпьютерном вычислительном комплексе СКИФ МГУ с использованием MPI-функций при $m = 16$, $n = 10$, с учетом дополнительных расходов системы на передачу коэффициентов между процессорами время на решение задачи составит ~ 1 –2 суток при 1000 выделенных процессах. Если в течение этого времени возникнет ситуация, при которой хотя бы один процесс прекратит работу, необходимые коэффициенты блоков получены не будут. Программная система «x-com», разработанная специалистами НИВЦ МГУ, предназначена для многопроцессорных комплексов. Основная цель системы – решать задачи в многопроцессорных средах, где возможно прекращение работы одного или нескольких процессоров во время решения задачи. Эта система оптимальна для решения задач, которые допускают разбиение на независимые подзадачи (в терминах системы «x-com» – «порции»).

Программа с реализацией алгоритма вычисления коэффициентов блоков A_{11} и A_{12} при $m = 16$, $n = 10$ была запущена в системе «x-com». Было задействовано 4000 процессоров. Общее время счета составило 6 ч 54 мин 23 с (24 863 с).

По данным статистики выполнения алгоритма в системе «x-com» вычислено следующее:

1) доля эффективности системы только с учетом проблем на узлах (непосчитанные порции) относительно идеальной ситуации, когда каждая порция будет посчитана с первого раза и только один раз, составляет 0,86203 (86,203 %);

2) доля эффективности системы с учетом дополнительных расходов на качественное выполнение задачи (лишний счет порций) относительно идеальной ситуации, когда каждая порция будет посчитана с первого раза и только один раз, составляет 0,96930 (96,930 %);

3) доля эффективности системы с учетом проблем на узлах и дополнительных расходов на качественное выполнение задачи относительно идеальной ситуации, когда каждая порция будет посчитана с первого раза и только один раз, составляет 0,83557 (83,557 %).

Применение системы «x-com» позволило получить коэффициенты блоков A_{11} и A_{12} при $m = 16$, $n = 10$. Ранее это не удавалось сделать по причине большой вычислительной сложности задачи, и время на получение результатов было неприем-

лемо большое, даже при вычислении на суперкомпьютерном комплексе с применением функций MPI.

Программа для вычисления коэффициентов A_{kl}^{ij} , получаемых при использовании метода коллокации в суммах рядов с количеством членов, равным 500, реализованная с использованием MPI-функций, была запущена на суперкомпьютерном комплексе. Количество выделенных процессоров на задачу – 100. В табл. 1 показано время выполнения программы, запущенной два раза при значении m , равном 9 и 10 соответственно.

Таблица 1

Количество коэффициентов матрицы и время, затраченное на вычисление данных коэффициентов при $m = 9$ и 10 соответственно

m	Количество коэффициентов без учета симметрии	Количество коэффициентов с учетом симметрии	Время выполнения (ч)
9	47 830	19 294	1,30
10	90 000	36 156	2,44

После формирования матриц производится решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), для матриц большой размерности выбран итерационный метод сопряженных градиентов. На каждой итерации используется операция скалярного произведения векторов, которая позволяет равномерно распределить нагрузку по узлам в процессе решения на суперкомпьютерном комплексе, что, в свою очередь, ведет к эффективному использованию ресурсов суперкомпьютерных комплексов для решения СЛАУ больших порядков. Были использованы ресурсы СКИФ МГУ «Чебышёв».

На рис. 2 представлены данные о времени решения СЛАУ для задачи дифракции на диэлектрическом теле в свободном пространстве (метод Галеркина) в серии модельных запусков (при $m = 4$).

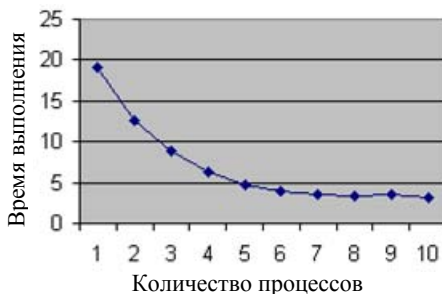


Рис. 1. Данные о времени выполнения программы (в секундах) для вычисления коэффициентов матрицы при модельных запусках ($m = 4$, $n = 3$)

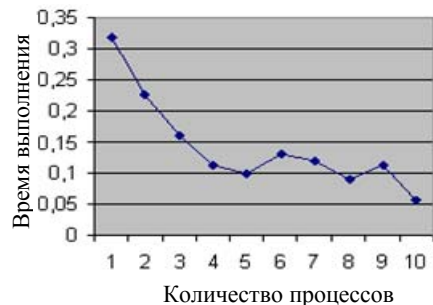


Рис. 2. Данные о времени выполнения программы (в секундах) для решения СЛАУ при модельных запусках ($m = 4$)

Из рисунка видно, что на суперкомпьютерном комплексе с увеличением числа используемых процессов увеличивается задержка при вычислениях, связанная с особенностями работы операционной системы вычислительного комплекса. Использование последнего для решения СЛАУ с матрицами малого порядка неэффективно.

Представлены результаты по задаче дифракции на диэлектрическом теле в прямоугольном волноводе. В связи с большим объемом вычислений коэффициентов A_{kl}^{ij} программа была запущена на кластере СКИФ МГУ. На рис. 3 представлено решение СЛАУ при $a=1$, $b=1$, $c=1$, $k_0=1$, $\xi = \text{diag}\{2, 2, 2\}$ и единичной правой части (метод коллокации): в данном случае абсолютное значение третьей компоненты поля \mathbf{E} в сечении $x_3 = 0,55$; количество интервалов разбиения $m = 10$.

На рис. 4 представлено решение СЛАУ при $a=2$, $b=1$, $c=2$, $k_0=2,5$, $\xi = \text{diag}\{2, 2, 2\}$ и правой части $\mathbf{E}^0(x) = A^+ \mathbf{e}_2 \sin(x_1 \pi / a) \exp\left(-ix_3 \sqrt{k_0^2 - \pi^2 / a^2}\right)$: в данном случае абсолютные значения третьей компоненты поля \mathbf{E} в сечении $x_3 = 0,9$; количество интервалов разбиения $m = 10$.

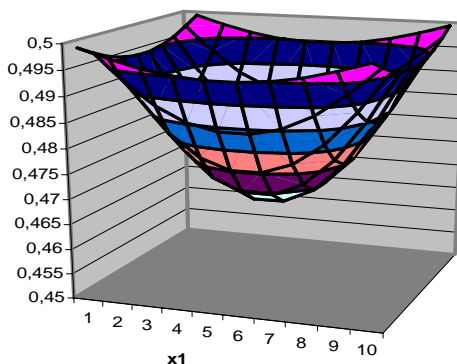


Рис. 3. Решение задачи дифракции электромагнитных волн на диэлектрическом теле в волноводе при $m = 10$. Модельная задача. Абсолютные значения третьей компоненты в сечении $x_3 = \text{const}$

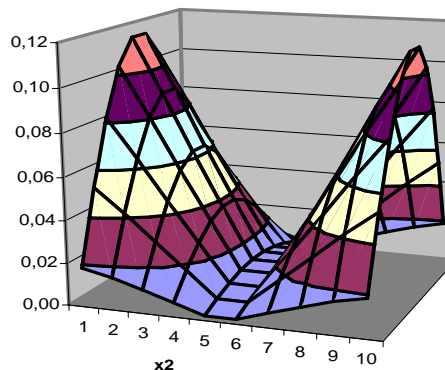


Рис. 4. Решение задачи дифракции электромагнитных волн на диэлектрическом теле в волноводе при $m = 10$ и падающей волне вдоль волновода. Абсолютные значения третьей компоненты в сечении $x_3 = \text{const}$

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

1. Краевые задачи дифракции на диэлектрическом теле в свободном пространстве и в прямоугольном волноводе сведены к решению векторных сингулярных интегродифференциальных уравнений.

2. Доказаны теоремы об однозначной разрешимости интегродифференциальных уравнений и соответствующих краевых задач при некоторых достаточных условиях.

3. Разработан метод Галеркина для численного решения векторного сингулярного интегродифференциального уравнения для задачи дифракции на диэлектрическом теле в свободном пространстве. Доказана теорема о сходимости метода Галеркина.

4. Разработан метод коллокации для численного решения векторного сингулярного интегродифференциального уравнения для задачи дифракции на диэлектрическом теле в прямоугольном волноводе. Доказана теорема об однозначной разрешимости конечномерных уравнений в методе коллокации.

5. Предложенные параллельные алгоритмы реализованы для решения векторных сингулярных интегродифференциальных уравнений для задач дифракции на диэлектрическом теле в свободном пространстве и в прямоугольном волноводе на суперкомпьютерных комплексах.

СПИСОК РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Миронов, Д. А. Математическое моделирование с использованием мощных вычислительных комплексов / Д. А. Миронов // Надежность и качество : тр. междунар. симп. / под ред. Н. К. Юркова. – Пенза : Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2005. – С. 141–145.

2. Миронов, Д. А. Применение суперкомпьютерных вычислительных комплексов для решения объемного сингулярного интегрального уравнения задачи дифракции на диэлектрическом теле / Д. А. Миронов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2008. – № 3. – С. 55–62.

3. Миронов, Д. А. Применение суперкомпьютерных вычислительных сред для решения объемного сингулярного интегрального уравнения задачи дифракции на диэлектрическом теле / Д. А. Миронов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 2. – С. 14–24.

4. Миронов, Д. А. Субиерархический подход для решения объемного сингулярного интегрального уравнения задачи дифракции на диэлектрическом теле в волноводе методом коллокации / М. Ю. Медведик, Д. А. Миронов, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 2. – С. 32–43.

5. Mironov, D. Analysis of Inverse Scattering in a Waveguide using the Method of Volume Singular Integral Equation / Y. Smirnov, Y. Shestopalov, D. Mironov // URSI International Symposium on Electromagnetic Theory (EMTS 2010), August 16–19. – Berlin, 2010. – P. 532–534.

6. Миронов, Д. А. О существовании и единственности решений обратной краевой задачи определения диэлектрической проницаемости материалов / Д. А. Миронов, Ю. Г. Смирнов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2010. – Т. 50. – № 9. – С. 1587–1597.

Научное издание

Миронов Денис Алексеевич

МЕТОДЫ ГАЛЕРКИНА И КОЛЛОКАЦИИ
ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБЪЕМНОГО СИНГУЛЯРНОГО
ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ НА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ТЕЛАХ

01.01.07 – вычислительная математика

Редактор *Е. П. Мухина*
Корректор *Н. А. Сидельникова*
Компьютерная верстка *С. В. Денисовой*

Подписано в печать 09.11.10. Формат 60х84¹/16.
Усл. печ. л. 1,45. Тираж 100. Заказ № 678.

Издательство ПГУ
440026, Пенза, Красная, 40.